Zadania kwalifikacyjne na warsztaty "Algebra obliczeniowa"

Damian Orlef

Warto przed rozwiązywaniem zadań zajrzeć do skryptu (link). Jeśli nie tłumaczy on wszystkich wątpliwości, proszę pisać na orlef.damian@gmail.com, a chętnie pomogę.

We wszystkich zadaniach k oznacza dowolny ze zbiorów $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

1 Zadania podstawowe

Zadanie 1.1 (1p.). Znajdź wszystkie liczby zespolone z, dla których $z^2 = 3 + 4i$.

Zadanie 1.2 (1p.). Udowodnij, że jeśli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, to $\bar{z}$ jest również jego pierwiastkiem.

Zadanie 1.3 (1p.). Udowodnij, że w $\mathbb{C}[x, y, z]$ ideał $I = (x - 1, y - 2, z - 3)$ to dokładnie zbiór $\{f \in \mathbb{C}[x, y, z] \mid f(1, 2, 3) = 0\}$.

Zadanie 1.4 (1p.). Udowodnij, że w dowolnym porządku jednomianowym $<$ i dla dowolnego $\alpha \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^n$ różnego od $(0, 0, \dots, 0)$, zachodzi $\alpha > (0, 0, \dots, 0)$.

Zadanie 1.5 (1p.). Udowodnij, że jeśli ustalimy pewien porządek jednomianowy na $k[x_1, \dots, x_n]$, to dla dowolnych niezerowych $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ zachodzi $\mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g) = \mathrm{LT}(f \cdot g)$.

Zadanie 1.6 (1p.). Udowodnij, że dla dowolnego podzbioru $A \subset k^n$, zbiór $I(A) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ jest ideałem.

Zadanie 1.7 (1p.). Udowodnij, że dla dowolnych $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$, zbiór $(f_1, \dots, f_m)$, określony tak jak w skrypcie, jest ideałem w $k[x_1, \dots, x_n]$.

2 Zadania średnie

Zadanie 2.1 (3p.). Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian dwóch zmiennych $P(x, y)$ o współczynnikach rzeczywistych, którego zbiorem wartości dla $x, y \in \mathbb{R}$ jest dokładnie $(0, +\infty)$.

Zadanie 2.2 (2p.). Udowodnij, że porządek $<_{lex}$ opisany w skrypcie jest porządkiem jednomianowym.

Zadanie 2.3 (2p.). Udowodnij, że suma zbiorów algebraicznych jest zbiorem algebraicznym.

Zadanie 2.4 (2p.). Niech $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ będą jednomianami. Udowodnij, że dla dowolnego $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ prawdą jest, że $f \in (f_1, \dots, f_m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jednomian w zapisie f jest podzielny przez któryś jednomian f_i.

3 Zadania dodatkowe

Zadanie 3.1 (5p.)**.** Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych, stopnia co najmniej 1. Udowodnij, że pierwiastki wielomianu $P'(x)$ leżą w otoczce wypukłej pierwiastków wielomianu P, czyli że jeśli wszystkimi pierwiastkami zespolonymi P są $c_1, \ldots, c_n$ oraz $P'(\alpha) = 0$, to α leży w wielokącie o wierzchołkach c_i (we wnętrzu lub na brzegu). Równoważnie, trzeba pokazać, że istnieją liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$, które są nieujemne, sumują się do 1 i zachodzi dla nich $\alpha = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n$.

Zadanie 3.2 (5p.)**.** Zaproponuj algorytm, który dla danego wielomianu $P(x)$ o współczynnikach całkowitych stwierdzi, czy istnieją wielomiany $Q(x)$, $R(x)$, stopni co najmniej 1 i również o współczynnikach całkowitych, dla których $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Można operować jedynie na liczbach wymiernych lub ich skończonych ciągach. Algorytm nie musi być w żadnym stopniu wydajny - wystarczy, żeby zwracał zawsze poprawną odpowiedź i na pewno się zatrzymywał.
Wskazówka: Warto umieć oszacować pierwiastki zespolone (ich moduł) dowolnego wielomianu przy pomocy jego współczynników i na odwrót.