

Geometria olimpijska

skrypt przedzajęciowy

Skrypt ma służyć zapoznaniu się z podstawowymi pojęciami i narzędziami, którymi będziemy posługiwać się w czasie warsztatów. Zalecane jest zapoznanie się z nim przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań kwalifikacyjnych. W tym skrypcie nie będziemy dowodzić podstawowych własności, gdyż będą one częścią kwalifikacji na warsztaty albo pojawiają się w czasie zajęć.

IZOMETRIE

Definicja 1. *Izometrie są to przekształcenia zachowujące odległości między punktami.*

Można wykazać, że jedynymi izometriami są:

- symetria z poślizgiem (może być o zerowy wektor, wtedy mamy zwykłą symetrię).
- obrót wokół danego punktu.
- translacja o wektor.

Zauważmy, że złożenie dwóch izometrii również jest izometrią, zatem składając dowolne dwa przekształcenia z powyższej listy dostaniemy również jedno z nich. Można wykazać, np. że:

- złożenie dwóch obrotów jest obrotem albo translacją o wektor.
- złożenie dwóch symetrii to obrót.

DYLATACJE

Definicja 2. *Dylatacje są to przekształcenia przeprowadzające proste na proste równoległe do nich.*

Można wykazać, że jedynymi dylatacjami są:

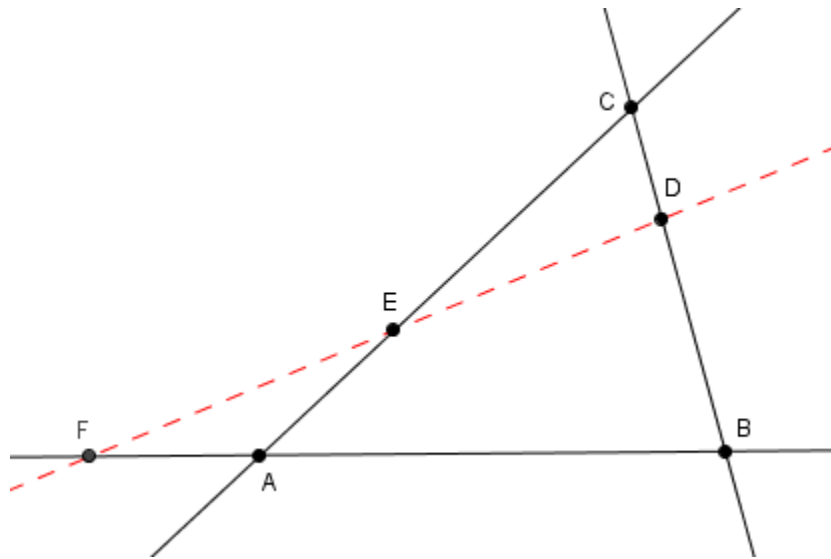
- jednokładność.
- translacja o wektor.

Ponownie możemy łatwo zauważyć, że złożenie dwóch dylatacji jest dylatacją.

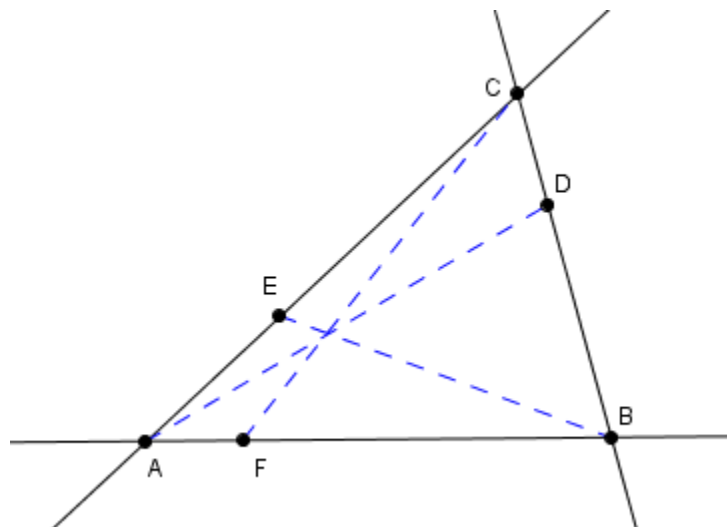
INWERSJA

Definicja 3. *Inwersja względem punktu O i promieniu r jest to przekształcenie, które danemu punktowi A przepisuje punkt A' taki, że punkt A' leży na półprostej OA oraz zachodzi równość $OA \cdot OA' = r^2$.*

PODSTAWOWE TWIERDZENIA

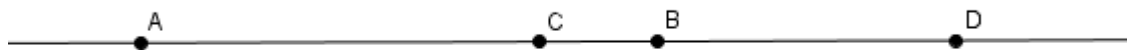


Twierdzenie 1. (Tw. Menelaosa) Punkty D, E, F są współliniowe wtedy, i tylko wtedy gdy $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = -1$.



Twierdzenie 2. (Tw. Cevy) Proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy, i tylko wtedy gdy $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1$.

DWUSTOSUNEK



Definicja 4. Dane są punkty A, B, C, D leżące na jednej prostej. Dwustosunkiem czwórki punktów A, B, C, D nazywamy wartość wyrażenia $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ i oznaczamy ją przez $(A, B; C, D)$.

Definicja 5. Czwórkę punktów A, B, C, D nazywamy harmoniczną, gdy $(A, B; C, D) = 1$.