Zadania kwalifikacyjne

Zadania kwalifikacyjne podzielone są na dwie części: obowiązkowe i reszta. Aby dostać się na warsztaty trzeba rozwiązać wszystkie obowiązkowe zadania, gdyż będą one niezbędne w czasie warsztatów. Poza tym warto jeszcze zdobyć trochę punktów za drugą część, ale nie trzeba rozwiązywać wszystkich zadań znajdujących się w tamtej części. Rozwiązania, które będą spałowane mogą zostać ocenione na mniejszą liczbę punktów (mam tu na myśli policzenie całego zadania na zespolonych itd.).

Część obowiązkowa

Zadanie 1. *Dla każdej pary izometrii rozstrzygnij jakie będzie ich złożenie i scharakteryzuj je (np. w przypadku obrotu podaj jego środek i kąt):*

- *złożenie dwóch obrotów.*
- *złożenie dwóch symetrii osiowych.*
- *złożenie translacji z obrotem.*
- *złożenie obrotu z translacją.*

Zadanie 2. *Scharakteryzuj przekształcenie, które jest złożeniem dwóch jednokładności (chodzi o to samo co w poprzednim zadaniu).*

Zadanie 3. *Rozważmy inwersję o środku w punkcie O i promieniu r oraz odcinek AB. Wykaż, że zachodzi równość $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$, gdzie A', B' to obrazy inwersyjne punktów A, B.*

Zadanie 4. *Dana jest prosta i punkty A, B, C, D na niej oraz punkt P poza tą prostą. Mamy ponadto drugą prostą na której zaznaczamy punkty A', B', C', D' takie, że wszyskie punkty P, A, A' są współliniowe i analogicznie dla pozostałych. Wykaż, że $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.*

Reszta

Zadanie 5. *(3p.) Dany jest sześciokąt* $ABCDEF$*. Wiadomo, że* $AB = BC$*,* $CD = DE$*,* $EF = FA$ *i* $\angle A + \angle C + \angle E = 360°$*. Wykaż, że kąty w trójkącie* BDF *są połowami odpowiadających kątów sześciokąta.*

Zadanie 6. *(10p.) Dany jest sześciokąt wypukły* $ABCDEF$*, w którym:* $AC = DF$*,* $CE = FB$*,* $EA = BD$*. Wykaż, że proste łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 7. *(2p.) Dany jest sześciokąt wypukły* $ABCDEF$*, w którym* $AC = FB$*,* $CE = BD$*,* $EA = DF$*. Wykaż, że symetralne odcinków* BC*,* DE*,* FA *przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 8. *(3p.) Dane są trzy rozłączne okręgi. Bierzemy wszystkie trzy punkty, które są środkami jednokładności o skali dodatniej przekształcającej jeden z nich na inny. Wykaż, że są one współliniowe.*

Zadanie 9. *(2p.) Dane mamy dwa okręgi styczne wewnętrznie w punkcie* P*. Prowadzimy prostą, która przecina każdy z tych okręgów w dwóch punktach. Jeden z nich przecina w punktach* A, B*, a drugi w punktach* C, D*. Wykaż, że* $\angle APC = \angle BPD$*.*

Zadanie 10. *(4p.) Dane są okręgi* o *i* O *styczne wewnętrznie w punkcie* T *(*o *znajduje się wewnątrz* O*). Na okręgu* O *wybieramy punkty* A, B*. Proste* AK, BL *są styczne do okręgu* o *odpowiednio w punktach* K, L*. Wykaż, że* $\frac{AT}{BT} = \frac{AK}{BL}$*.*

Zadanie 11. *(4p.) Dany mamy trójkąt* ABC*. Punkty* D, E, F *są punktami styczności okręgu wpisanego do boków* BC, AC, AB*. Punkt* X *leży wewnątrz trójkąta* ABC *przy czym okrąg wpisany w trójkąt* XBC *przechodzi przez punkt* D*. Punkty* Y, Z *są punktami styczności tego okręgu do boków* CX, BX*. Wykaż, że na czworokącie* $ZYEF$ *da się opisać okrąg.*

Zadanie 12. *(3p.) Dane mamy dwa okręgi styczne zewnętrznie w punkcie* K*. Prosta* k *jest styczna zewnętrznie do tych okręgów w punktach* A, B*. Odcinek* AC *jest średnicą jednego z tych okręgów. Prosta* l *przechodzi przez punkt* C *i jest styczna do drugiego okręgu w punkcie* E*. Wykaż, że* $CA = CE$*.*

Zadanie 13. *(3p.) Okręgi* o_1, o_2, o_3, o_4 *przechodzą przez punkt* P*. Okręgi* o_1, o_3 *i* o_2, o_4 *są parami styczne zewnętrznie. Punkty* A, B, C, D *są przecięciami okręgów* o_1 *z* o_2*,* o_2 *z* o_3*,* o_3 *z* o_4*,* o_4 *z* o_1*. Wykaż, że* $\frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA} = \frac{PB^2}{PD^2}$*.*