Rozwiązanie zadania 2.1 z zadań kwalifikacyjnych

Damian Orlef

Rozwiązanie

Zadanie. Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian dwóch zmiennych $P(x, y)$ o współczynnikach rzeczywistych, którego zbiorem wartości dla $x, y \in \mathbb{R}$ jest dokładnie $(0, +\infty)$.

Rozwiązanie. Rozważmy wielomian $P(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$. Łatwo widać, że przyjmuje tylko wartości nieujemne, a zerować się nie może. Co więcej, zachodzi dla $x \neq 0$ równość $P(x, \frac{1}{x}) = x^2$, więc możemy uzyskać dowolnie małe wartości $P(x, y)$.

Dygresje

Pomysł, żeby rozważać sumę kwadratów jest w miarę naturalny dla liczb rzeczywistych.

Ciekawsze są konsekwencje faktu, że układ równań $x = 0$, $xy - 1 = 0$ jest sprzeczny. Możemy w ten sposób do danego układu (1) równań wielomianowych $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dopisać warunek, że pewne wyrażenie $g(x_1, \ldots, x_n)$ nie jest równe zeru w ten sposób, że wprowadzamy nową zmienną y i dopisujemy równanie $g(x_1, \ldots, x_n)y - 1 = 0$, dostając w efekcie układ (2) z większą liczbą zmiennych. Aby zatem sprawdzić, czy układ równań (1) implikuje, że $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, wystarczy nam wiedzieć, czy układ (2) jest sprzeczny. Sztuczka ta działa dla dowolnego ciała.

Przyjrzyjmy się sytuacji, w której współczynniki są zespolone. Wówczas słabsza wersja słynnego Nullstellensatz, o którym coś więcej być może powiemy na warsztatach, mówi nam z kolei, że układ (2) jest sprzeczny tylko wtedy, gdy istnieją wielomiany $h_1, \ldots, h_m$ oraz h_0 należące do $\mathbb{C}[y, x_1, \ldots, x_n]$, dla których zachodzi tożsamość wielomianowa $1 = h_0(gy - 1) + h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + h_m f_m$.

Można stąd po przemnożeniu obustronnym przez odpowiednio wysoką potęgę g^N, dojść w miarę prosty sposób do stwierdzenia, że $g^N \in (f_1, \ldots, f_m)$ (w $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$).