Algorytmiczna teoria grafów, wykład drugi
Drzewa rozpinające

spisał Zbigniew Skowron

27 lutego 2008

1 Reprezentacje grafów

Oznaczenia: $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $|E| = m$.

Macierz sąsiedztwa:

$$\begin{aligned} A\,[n \times n] &= [a_{ij}] \\ a_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{dla } v_i \text{—} v_j \in E \\ 0 & \text{wpw.} \end{cases} \end{aligned}$$

Koszt pamięciowy: $O(n^2)$ (ew. $O(n^2/\log n)$ przy kodowaniu binarnym)

Listy sąsiedztwa:

$L\,[1 \ldots n]$
$L\,[i]$ - lista sąsiedztwa wierzchołka v_i

Koszt pamięciowy: $O(n + m)$ (czyli liniowy względem rozmiaru grafu)

Macierz incydencji:

$$\begin{aligned} I\,[n \times m] &= [i_{ij}] \\ i_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{gdy } v_i \text{ jest incydentny z } e_j \\ 0 & \text{wpw.} \end{cases} \end{aligned}$$

Koszt pamięciowy: $O(nm)$

2 Zliczanie drzew rozpinających

Dane: $G = (V, E)$,

Pytanie: Ile jest drzew rozpinających w G?

Można próbować generować wszystkie drzewa rozpinające (np. generować wszystkie $n - 1$ elementowe podzbiory krawędzi i sprawdzać, czy tworzą drzewo rozpinające). Czas byłby wykładniczy.

My policzymy drzewa rozpinające w czasie wielomianowym.

$D(G)$	–	macierz stopni (macierz diagonalna, na przekątnej stopnie wierzchołków)
$L(G) = D(G) - A(G)$	–	laplasjan grafu G

Orientujemy krawędzie tego grafu:

$$G(V,E) \xrightarrow{\text{dowolna orientacja}} \vec{G}(V,E)$$

$Q(G)$ – macierz incydencji grafu $\vec{G}$

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } e_j \text{ wchodzi do } v_i \\ -1 & \text{gdy } e_j \text{ wychodzi z } v_i \\ 0 & \text{wpw.} \end{cases}$$

Lemat: (powiązanie L i Q)
Dla dowolnej orientacji G: $L(G) = Q(G) \cdot Q(G)^T$ $G = (V,E)$,

Dowód:

1. Na przekątnej macierzy wynikowej dostajemy sumę wyrazów 1^2 oraz $(-1)^2$ — jeden wyraz dla jednej krawędzi, czyli w sumie stopień danego wierzchołka.
2. Gdy $i \neq j$:
   Jeśli nie ma krawędzi pomiędzy v_i a v_j, to dostaniemy 0.
   Jeśli jest krawędź pomiędzy v_i a v_j, to dostaniemy iloczyn 1 i -1 (krawędź wchodzi do jednego wierzchołka, a wychodzi z drugiego), czyli -1.

Oznaczenia:

M – macierz $n \times m$
$S \subseteq \{1,\dots,m\}$, $|S| = n$
Zakładamy bez straty ogólności, że $n \leq m$

M_S – macierz $n \times m$
Macierz M z kolumnami o indeksach z S
N – macierz $m \times n$
N^S – macierz $n \times n$
Macierz N z wierszami o indeksach z S
B_i – macierz B po usunięciu i-tego wiersza i i-tej kolumny

Twierdzenie: (Cauchy–Binet)
M — macierz $n \times m$, N — macierz $m \times n$

Teza:

$$\det(M \cdot N) \quad = \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,m\} \\ |S|=n}} \det(M_S)\cdot\det(N^S)$$

Twierdzenie: Kirchoffa o macierzach i drzewach (*matrix-tree theorem*)
$G = (V, E)$
$L = L(G)$ — laplasjan grafu G

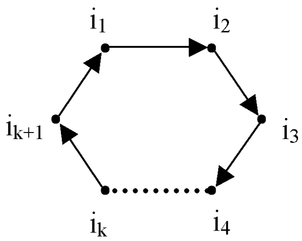
Teza: Liczba drzew rozpinających G wynosi $\det(L_i)$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dowód:
Q — macierz incydencji dla dowolnej orientacji grafu G
$L = Q \cdot Q^T$
$L_i = Q' \cdot Q'^T$
Q' — macierz Q z usuniętym i-tym wierszem

Suma po wszystkich $n-1$ elementowych podzbiorach krawędzi:

$$\det(L_i) \quad = \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,m\} \\ |S|=n}} \underbrace{\det(Q'_S)\cdot\det(Q'^T_S)}_{\det^2(Q'_S)}$$

- Załóżmy, że (V, S) nie jest drzewem rozpinającym — to znaczy, że musi być cykl w (V, S).
  Weźmy jakiś cykl:

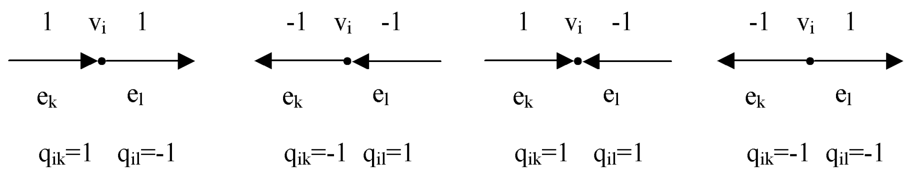
  

  Na rysunku mamy krawędzie skierowane dowolną orientacją. Każda krawędź odpowiada jednej kolumnie w zmodyfikowanej macierzy incydencji Q'_S.

Szukamy liniowo zależnego podzbioru kolumn macierzy Q'_S.

Dla każdej kolumny z poza cyklu bierzemy współczynnik 0. Przechodzimy po cyklu i nadajemy krawędzi współczynnik 1 gdy krawędź jest skierowana zgodnie z kierunkiem przechodzenia, a -1 wpw.

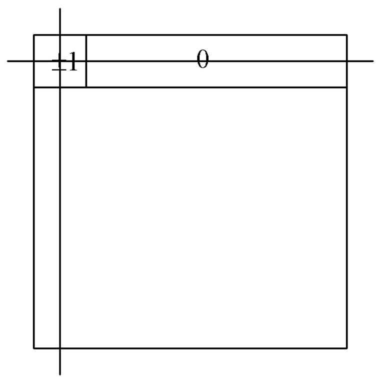
Mamy 4 przypadki:



Liczby ponad krawędziami dają nam kombinację liniową kolumn macierzy Q_S (odpowiadającym tym krawędziom) równą $\vec{0}$, a więc i $\det(Q_S) = 0$.

- Załóżmy, że (V, S) daje drzewo rozpinające. Wobec tego w (V, S) istnieją ≥ 2 wierzchołki o stopniu 1.
  Niech l_1 będzie takim wierzchołkiem, różnym od v_i (L_i nie zawiera wiersza odpowiadającego wierzchołkowi v_i).

  Permutujemy wiersze i kolumny Q'_S tak, aby pierwszym wierszem było l_1, a pierwsza kolumna odpowiadała krawędzi incydentnej z l_1: $Q'_S \longrightarrow P_1$
  Następnie usuwamy wierzchołek l_1 z grafu:



  Podobnie robimy dalej:
  $P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow \ldots$

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & & & & \\ & \pm 1 & & \mathbf{0} & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik powstałej macierzy jest równy ± 1.

Zatem $\det(Q_S)$ jest równy 0 gdy zbiór krawędzi S nie jest drzewem rozpinającym i 1 gdy nim jest.
Ponieważ:

$$\det(L_i) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ |S|=n}} \det{}^2(Q'_S)$$

to teza jest prawdziwa:
Liczba drzew rozpinających G wynosi $\det(L_i)$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$\square$

Wniosek: Liczba drzew rozpinających klikę K_n jest równa n^{n-2}:

$$L_i = \underbrace{\begin{bmatrix} n & & \text{-1} \\ & n & \\ \text{-1} & \ddots & \\ & & n \end{bmatrix}}_{n-1} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} n \\ n \\ -1 \\ n \end{bmatrix}}\right\}_{n-1}$$

$$\det(L_i) = n^{n-2}$$