Funkcje tworzące – zadania kwalifikacyjne

Mateusz Rapicki, Piotr Suwara

19 maja 2012

Rozwiązania zadań kwalifikacyjnych należy wysyłać do 14 lipca na adresy obu prowadzących: Mateusz Rapicki, `mati717@gmail.com`, Piotr Suwara, `peter_de_sowaro@o2.pl`. Jeśli przesyłacie zdjęcia/skany, nie zapomnijcie obniżyć ich jakości, aby zajmowały mało miejsca (np. zapisując je w formacie jpg w jakości 30 korzystając z programu GIMP). Zachęcamy do znacznie wcześniejszego przesyłania rozwiązań – możliwa jest wtedy wcześniejsza ich ocena i poprawa. Na stronie ukaże się skrypt z materiałami pomocnymi w rozwiązywaniu poniższych zadań.

1 Podstawy

Należy rozwiązać *wszystkie* z podanych poniżej 10 zadań. Jeśli sprawiają Wam one jakiekolwiek trudności, nie wahajcie się prosić nas o wyjaśnienie i pomoc.

1. Udowodnij, że ciąg $a_n = 11n + 7$ nie zawiera żadnej z liczb ciągu Fibonacciego. *Wskazówka: rozpatrz reszty z dzielenia przez 11.*

2. Dla jakich n liczba $\dfrac{n^3+n+1}{n^2-n+1}$ jest całkowita? *Wskazówka: policz największy wspólny dzielnik.*

3. Niech d_n oznacza liczbę ciągów liter a, b, c długości n takich, że litery a, b nie stoją bezpośrednio obok siebie. Wyznacz wzór rekurencyjny, w którym każdy wyraz ciągu d_n będzie uzależniony tylko od dwóch poprzednich. *Wskazówka: Niech a_n oznacza liczbę ciągów takich jak wyżej, ale w których n-tą literą jest a. Podobnie b_n, c_n to liczba ciągów spełniających powyższe warunki kończących się na, odpowiednio, b lub c. Wyznacz a_n, b_n, c_n w zależności od $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$. Korzystając z tego, że $d_n = a_n + b_n + c_n$, wyznacz d_n w zależności od d_{n-1}, d_{n-2}.*

4. Wyraź:

   (a) $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} a_j a_k$ za pomocą $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$.

(b) $\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} a_{ijk}$ jako trzykrotną sumę: po i, potem po j, potem po k.

(c) $\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} a_{ijk}$ jako trzykrotną sumę: po k, potem po j, potem po i.

5. Udowodnij $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$.

6. Wyznacz ciąg tworzony przez funkcję $A(x) = \frac{1}{1-2x}$. *Rozwiń w szereg potęgowy.*

7. Oblicz (dla $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \mu = \varepsilon + 1$):

   (a) $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$

   (b) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

   (c) $\frac{1-5i}{2+3i}$

   (d) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$

   (e) $1 + \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2$

   (f) $(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$

   (g) $(x-\mu)(x-\bar{\mu})$

8. $w_1, \ldots, w_n$ to różne pierwiastki zespolone stopnia n z 1, $n > 2$, udowodnij, że:

   (a) $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$

   (b) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} w_i w_j = 0$

   Wskazówka: w_i są pierwiastkami wielomianu $x^n - 1$; zastosuj wzory Viete'a.

9. Zapisz $f(x)$ w postaci $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$:

   (a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1$

   (b) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1$

   (c) $f(x) = g(x+3), g(x) = x^4 - x^3 + 1, \quad x_0 = 0$

10. Udowodnij, że $x^2 + x + 1$ dzieli $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+2}$ dla dowolnych naturalnych n, m, k. *I sposób: zauważ, że $x^2 + x + 1$ dzieli $x^3 - 1$, czyli dzieli $x^{l+3} - x^l$. II sposób: znajdź pierwiastki zespolone $x^2 + x + 1$ i pokaż, że są to pierwiastki $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+2}$, z odpowiednimi krotnościami.*

2 Trudniejsze

Z poniższych zadań można rozwiązać *co najwyżej 5*. Każde wybrane zadanie musi być *z innego działu*. Rozwiązanie 5 zadań gwarantuje kwalifikację. Można zakwalifikować się rozwiązując mniej zadań – to zależy od tego, ile zadań uda się rozwiązać innym uczestnikom.

Teoria liczb:

11. Udowodnij, że jeśli dla liczby całkowitej dodatniej n liczba $2^n + 1$ jest pierwsza, to n jest potęgą liczby 2.

12. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $a > 1$ zachodzi $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$, gdzie (a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb a i b.

Kombinatoryka:

13. Udowodnij tożsamość $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{r}{k} = (-1)^m \binom{r-1}{m}$ dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, r.

14. Oblicz $\sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} 3^k$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

Funkcje tworzące:

15. Wyznacz funkcję tworzącą ciąg $a_n = 3n + 5$ i zapisz ją w zwartej postaci.

16. Rozwiń $A(x, y) = \frac{1}{1 - y - x^2}$ jako szereg od x oraz y, oblicz współczynnik w tym rozwinięciu przy wyrazie $x^k y^l$.

Liczby zespolone:

17. Oblicz $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos ka$ dla $a \in [0, \pi]$.

18. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz $\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $|z| = 1$.

Wielomiany:

19. $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$, gdzie liczby $x_1, \ldots, x_n, 0$ są parami różne. Pokaż, że wielomian $\sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i) f(x)}{f'(x_i)(x - x_i)}$ przyjmuje w x_i wartości $g(x_i)$.

20. Udowodnij, że jeśli wielomian o współczynnikach wymiernych dzieli się przez $x - \sqrt{2}$, to dzieli się przez $x^2 - 2$.

3 Ekstra

Rozwiązanie poniższego zadania bardzo nam zainponuje (choć jeszcze nie ustaliliśmy nagrody za jego zrobienie).

101. $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, gdzie liczby $x_1, \ldots, x_n, 0$ są parami różne. Pokaż, że $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{f'(x_i)}$ jest równe 0 dla $0 \leqslant k \leqslant n-2$ oraz 1 dla $k = n-1$.