Funkcje tworzące – skrypt do zadań

Mateusz Rapicki, Piotr Suwara

20 maja 2012

1 Kombinatoryka

Definicja 1 (dwumian Newtona)**.** $\binom{n}{k}$ dla liczb całkowitych nieujemnych n, k to liczba sposobów wybrania k elementów z n-elementowego zbioru.

Definicja 2 (silnia)**.** $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$. $0! = 1$.

Twierdzenie 1. *$n!$ to liczba permutacji zbioru n-elementowego (liczba ustawień n elementów w rzędzie).*

Twierdzenie 2. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *dla* $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = 0$ *dla* $n < k$.

Twierdzenie 3 (wzór dwumianowy)**.** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2 Liczby zespolone

2.1 Podstawy

Definicja 3. Liczby zespolone to zbiór $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, gdzie i jest pewnym symbolem. Możemy je utożsamiać z punktami na płaszczyźnie, tj. $a + bi$ utożsamiamy z punktem o współrzędnych (a, b). Definiujemy działania w taki sposób, że $i^2 = -1$:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Definicja 4 (długość)**.** Dla $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definiujemy długość (moduł): $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definicja 5 (sprzężenie)**.** Sprzężeniem liczby $z = a+bi \in \mathbb{C}$ nazwiemy liczbę $\bar{z} = a-bi \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 4. $z\bar{z} = |z|^2$

Twierdzenie 5. *Liczbą odwrotną do $a + bi$ jest* $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

2.2 Postać biegunowa

Definicja 6 (postać biegunowa)**.** Liczbę $z = a + bi$ możemy zapisać w postaci $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ dla $r = |z|$ oraz $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Kąt α nazywamy *argumentem* liczby z i oznaczamy Arg z.

W ten sposób możemy patrzeć na liczbę zespoloną z jako na wektor długości $r = |z|$ nachylony pod kątem α do dodatniej półosi rzeczywistej.

Twierdzenie 6. *Jeśli* $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$*, to* $zw = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$*.*

Czyli mnożenie liczb zespolonych to mnożenie ich długości oraz dodawanie ich argumentów.

Twierdzenie 7 (wzór de Moivre'a)**.** $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$*, wtedy* $z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

2.3 Pierwiastki z jedności

Definicja 7. Pierwiastkiem z 1 stopnia n nazwiemy taką liczbę zespoloną z, że $z^n = 1$. Inaczej mówiąc, z jest pierwiastkiem wielomianu $P(x) = z^n - 1$.

Twierdzenie 8. *Jeśli z jest pierwiastkiem z jedności stopnia n, to istnieje takie całkowite* $0 \leqslant k \leqslant n-1$*, że* $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$*.*

3 Pochodne

Definicja 8. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Wówczas, jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ to nazywamy ją pochodną (albo różniczką) funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Zasadniczo, *nie będziemy korzystać z tej definicji*, lecz z kilku podstawowych własności pochodnych oraz znajomości pochodnych dla kilku ważnych funkcji. Często spotykany jest zapis $(f(x))'$. Zwykle oznacza on $f'(x)$. $f''(x)$ to druga pochodna $f(x)$, to znaczy pochodna $f'(x)$: $f''(x) = (f'(x))'$. Analogicznie, $f^{(n)}(x)$ to n-ta pochodna, czyli pochodna $f^{(n-1)}(x)$, gdzie $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Twierdzenie 9 (podstawowe własności)**.** *Niech* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x, c \in \mathbb{R}$ *oraz istnieją pochodne* $f'(x)$ *oraz* $g'(x)$*. Wówczas zachodzą następujące równości:*
Liniowość pochodnej: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.
Wzór na pochodną iloczynu: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
Wzór na pochodną ilorazu, prawdziwy o ile $g(x) \neq 0$*:* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.
Wzór na pochodną złożenia: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Twierdzenie 10 (pochodne niektórych funkcji)**.** $\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$*, o ile wyrażenie* x^α *ma sens*

$(e^x)' = e^x$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$*, o ile* $x > 0$
$\sin'(x) = \cos(x)$
$\cos'(x) = -\sin(x)$

4 Funkcje tworzące

4.1 Definicja

Definicja 9 (funkcja tworząca)**.** *Funkcją tworzącą* (szeregiem formalnym) ciągu (a_n) nazywamy szereg formalny $A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Definicja 10 (operacje na funkcjach tworzących)**.** $F(x)$ funkcja tworząca ciągu (f_n), $G(x)$ funkcja tworząca ciągu (g_n). Dla uproszczenia zapisu niech $f_{-1} = f_{-2} = \ldots = 0 = g_{-1} = g_{-2} = \ldots$.

- $\alpha F(x) + \beta G(x) = \sum_{n\geqslant 0}(\alpha f_n + \beta g_n)x^n$
- mnożenie: $F(x)G(x) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} f_k g_{n-k}\right)x^n$
- różniczkowanie: $G'(x) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)g_{n+1}x^n$

4.2 Rozwijanie w szereg

Definicja 11 (funkcje analityczne)**.** *Funkcje analityczne* to takie, które rozwijają się w szereg, tj. $f(x)$ jest analityczna w otoczeniu x_0, jeśli dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Mówimy wtedy, że funkcja rozwija się w szereg Taylora w x_0. Jeśli $x_0 = 0$, to mamy szereg Maclaurina:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Twierdzenie 11. *Funkcje: stała,* x^a *(w tym wielomiany), wykładnicza* e^x*, logarytmiczna* $\ln x$*, funkcje trygonometryczne, są analityczne (tam, gdzie są dobrze określone).*

Funkcje: odwrotna do analitycznej, suma funkcji analitycznych, iloczyn funkcji analitycznych, iloraz funkcji analitycznych, złożenie funkcji analitycznych są analityczne (tam, gdzie są dobrze określone).

Funkcje tworzące często wolimy analizować w *postaci zwartej*. Korzystając ze wzoru na szereg Maclaurina funkcji otrzymujemy m.in.:

Twierdzenie 12.

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$
- $\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
- $e^x = \sum_{x\geqslant 0} \frac{1}{n!} x^n$

5 Wielomiany

5.1 Podzielność

Definicja 12. Wielomian $P(x)$ dzieli wielomian $Q(x)$, jeśli istnieje taki wielomian $R(x)$, że $Q(x) = P(x)R(x)$.

Twierdzenie 13 (Bézout)**.** *Dla dowolnego a, jeśli $P(x)$ to wielomian, to istnieje dokładnie jeden taki wielomian $Q(x)$, że*

$$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a).$$

5.2 Rozkład w $\mathbb{C}$

Twierdzenie 14 (zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian ma pierwiastek w $\mathbb{C}$, to znaczy dla każdego wielomianu $P(x)$ istnieje takie $x_0 \in \mathbb{C}$, że $P(x_0) = 0$.*

Z twierdzenia Bézout wynika, że jeśli $P(x_0) = 0$, to $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ dla pewnego wielomianu $Q(x)$. Następnie znajdujemy x_1 takie, że $Q(x_1) = 0$ i mamy $P(x) = (x - x_0)Q(x) = (x - x_0)(x - x_1)R(x)$. Kontynuując, otrzymujemy

Twierdzenie 15. *Każdy wielomian rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{C}$, to znaczy dla każdego wielomianu P istnieją takie liczby $a, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$, że $P(x) = a(x - w_1)(x - w_2)\ldots(x - x_n) = a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - w_i)$.*

Uwaga 1. Powyższy rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników.

5.3 Pierwiastki

Definicja 13. Jeśli w jest pierwiastkiem $P(x)$ oraz $P(x) = a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - w_i)$, to krotnością pierwiastka w jest liczba wystąpień w w ciągu $w_1, \ldots, w_n$. Równoważnie, k jest krotnością w, jeśli $P(x) = (x - w)^k Q(x)$ oraz $Q(w) \neq 0$.

Twierdzenie 16 (wzory Viete'a). *Jeśli* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - w_n)$ *dla* $a_n \neq 0$, *to zachodzą równości:*

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} w_{i_1} w_{i_2} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} w_{i_1} \ldots w_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$w_1 w_2 \ldots w_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$