Bardzo krótki wstęp do macierzy

Tomek Smołka

3 lipca 2012

Skrypt powstał dla ludzi, którzy nigdy nie mieli do czynienia z mnożeniem macierzy, są to podstawy podstaw.

W trakcie naszych warsztatów będziemy głównie pracować na układach dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Do ich opisu przydadzą nam się głównie macierze 2x2 i wektory dwuelementowe, dlatego właśnie nimi zajmiemy sie w dalszej części tej notatki.

0.1 Mnożenie macierzy przez wektor

Mamy dany układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11} \cdot x & + & a_{12} \cdot y & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x & + & a_{22} \cdot y & = & b_2 \end{array} \right. \tag{1}$$

Naszym celem jest zapisanie układu równań 1 w postaci macierz razy wektor równa się inny wektor:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{2}$$

Ta operacja pokazuje charakterystyczny sposób mnożenia macierzy przez wektor. Iloczyn ten daje w wyniku wektor. Jak pokazuje ponższy przykład:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]}_{macierz} \underbrace{\left[\begin{array}{c} e \\ f \end{array} \right]}_{wektor} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} a \cdot e + b \cdot f \\ c \cdot e + d \cdot f \end{array} \right]}_{wektor} \tag{3}$$

Skoro wiemy jak mnożyć macierz przez wektor, to może spróbujemy zapisać podany na początku układ równań 1 w postaci macierzowej 2. Zobaczmy, czy zapisanie poniżej równanie macierzowe byłoby zgodne z naszym układem równań:

$$\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right] \tag{4}$$

Po wymnożeniu zgodnie z 3 i porównując wierszami z 1 dochodzimy do wniosku, że jest to poprawny zapis tego układu równań w postaci macierzowej. Ostatecznie w tym zapisie:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] ; \vec{x} = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] ; \vec{b} = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right] \tag{5}$$

0.2 Mnożenie przez siebie macierzy

W przypadku składania kilku transformacji Lorentza, będziemy potrzebowali przemnożyć przez siebie macierze. Jest to podobne jak mnożenie macierzy przez wektor. Przy czym wynikiem mnożenia dwóch macierzy 2x2 jest macierz 2x2. Rozpatrzmy przykład poniżej 6. Technicznie, mnożąc 2 macierze, to kolumny macierzy**B** mozemy traktować jak 2 odzielne wektory, które mnożymy. Jeszcze jedna różnica polega na tym że otrzymany wynik, jest również macierzą 2x2, a wynik mnożenia lewej kolumny macierzy **B** przez macierz **A**, jest lewą kolumną macierzy **C**. Analogicznie kolumna z prawej strony.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{macierz\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} u & x \\ v & y \end{bmatrix}}_{macierz\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \cdot u + b \cdot v & a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot u + d \cdot v & c \cdot x + d \cdot y \end{bmatrix}}_{macierz\mathbf{C}} \tag{6}$$

0.3 Mnożenie macierzy i wektora przez liczbę

Mnożąc macierz lub wektor przez liczbę mnożymy każdy element przez daną liczbę.

$$\begin{gathered} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix}; \vec{\lambda x} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{7}$$

W wypadku wątpliwości dobrze zerknąć do wikipedii na mnożenie macierzy, lub skonsultować się z prowadzącymi.