§ 7
Określenie aksjomatyczne funkcji podstawowych.

W poprzednich paragrafach jest rozwiązany cały szereg równań funkcyjnych. Często rozwiązaniem równania była całkowicie określona funkcja.
Np. jedynym rozwiązaniem równania

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1, \quad D(f) = R \setminus \{0\} \qquad \mathbf{(1)}$$

jest funkcja $\frac{1}{x}$.
Powstaje pytanie znaleźć zależność odwrotnie proporcjonalną jako rozwiązanie równania (1).
W istocie równanie (1) jest cechą charakterystyczną funkcji $f(x)=\frac{1}{x}$.
Myśl wykazania zbioru cech charakterystycznych, całkowicie określających funkcje, jest treścią aksjomatycznej metody określenia funkcji.
Więc, dla funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$ suma charakterystycznych cech składa się z równania funkcyjnego

$$f(x + y) = f(x)\, f(y) \qquad \mathbf{(2)}$$

warunku monotoniczności dla wszystkich $x \in R$ i równości $f(1) = e$.
W rzeczy samej, jak wykazano (patrz, str. 16), monotonicznymi rozwiązaniami (2) są funkcje $f(x)\equiv 0$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.
Wobec warunku $f(1)=e$, zapewniającego jedyne rozwiązanie (2), otrzymamy $f(x) = e^x$.
Cechy charakterystyczne, całkowicie określające funkcje, nazywa się *aksjomatami*.
W układzie aksjomatów, przyjmujących jakościowe określenia funkcji, najważniejszym aksjomatem jest równanie funkcyjne. Do tego, zakłada się istnienie jego rozwiązania, a podstawową treścią aksjomatycznej metody określenia funkcji jest dowód wyłączności tego rozwiązania, a także badania cech określanej funkcji.

Jako przykład przytoczymy określenie aksjomatyczne jednej z funkcji trygonometrycznych. W szkole średniej funkcje trygonometryczne poznaje się na podstawie ich określenia geometrycznego. Przytoczone niżej określenie funkcji *cos x* powstało przy pomocy środków czysto analitycznych, niezależnie od geometrii. Dla określanej funkcji będziemy stosować termin *„kosinus analityczny"*. Następnie ustalimy równoważność kosinusa analitycznego i funkcji cos x, określanej geometrycznie.

Określenie
Kosinusem analitycznym nazywa się funkcja:

a) ciągła dla wszystkich rzeczywistych x;
b) spełniająca równanie funkcyjne

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\, f(y) \qquad \mathbf{(3)}$$

c) przyjmująca w punkcie zero wartość dodatnią;
d) zamieniająca się w zero dla pewnych dodatnich wartości $x = c$ takich, że $f(x) \neq 0$ dla $0 < x < c$.

Z tego układu aksjomatów można wyprowadzić cały szereg własności kosinusa analitycznego.

Własność 1
$f(0) = 1$
Zakładając w (3) $x=y=0$, otrzymamy $f(0)=f^2(0)$, i ponieważ $f(0)>0$, to $f(0) = 1$.

Własność 2
$f(x)$ – funkcja parzysta.
To wynika z (3) dla $x=0$ z uwzględnieniem własności 1.