Własność 3

Funkcja f(x) jest okresowa, z najmniejszym okresem określonym przez 4c.

Przede wszystkim wykażemy, że

$$f(2c+x) = -f(x) \qquad (4)$$

Rzeczywiście,

$$f(2c + x) + f(x) = f((c + x) + c) + f((c + x) - c) = 2f(c + x)\, f(c) = 0$$

Stąd, w szczególności, mamy

$$f(2c) = -f(0) = -1 \qquad (5)$$

Następnie, liczba 4c jest okresem f(x), ponieważ

$$f(4c + x)=f(2c + (2c + x))= -f(2c + x)=f(x).$$

Załóżmy, że liczba dodatnia l, mniejsza od 4c, jest okresem f(x). Wtedy $f(l)=f(0+l)=f(0) = 1$ z (3) dla

$x=y=\frac{l}{2}$ otrzymamy $f(l) + f(0)=2f^2(\frac{l}{2})$, skąd $f^2(\frac{l}{2}) =1$, $f(\frac{l}{2})=\pm 1$.

Załóżmy na początku, że $f(\frac{l}{2}) = 1$, wtedy, na mocy (5), $f(2c) + f(\frac{l}{2}) = 0$.

Z równania (3) dla $x = c+\frac{l}{4}$ i $y=c-\frac{l}{4}$,

stosując kolejno (4) i własność 2, mamy

$$f(2c)+f(\frac{l}{2})=2f(c+\frac{l}{4})f(c-\frac{l}{4})=$$

$$2f(2c-(c-\frac{l}{4}))f(c-\frac{l}{4})=-2f(-(c-\frac{l}{4}))f(c-\frac{l}{4})=-2(f(c-\frac{l}{4}))^2$$

Tak więc, $f(c-\frac{l}{4}) = 0$ dla $0 < c - \frac{l}{4} < c$, co jest sprzeczne z aksjomatem d).

Własność 4

Funkcja f(x) jest ograniczona, $|f(x)| \le 1$ dla wszystkich $x \in R$.

Załóżmy, że dla pewnych $x = a$ $|f(a)| > 1$,

wtedy z (3) dla $x = c + a$, $y = c - a$ otrzymamy

$$2f(c + a)\, f(c - a) = f(2c)+f(2a) = -1+f(2a).$$

Ale $f(2a) = f(a + a) + f(a - a) - 1 = 2f^2(a) - 1.$

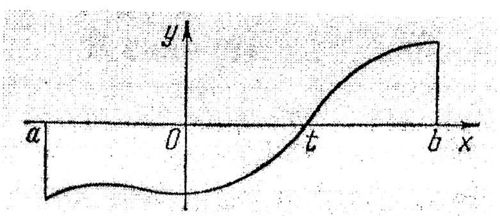
Dlatego $f(c + a)\, f(c - a) = f^2(a) - 1 > 0.$

Oprócz tego, na mocy (3) i (4), $f(c - a)\, f(c + a) = f(2c - (c + a))\, f(c + a) = -(f(c + a))^2 \le 0.$

Otrzymana sprzeczność udowadnia własność 4.

Własność 5

Funkcja f(x) jest dodatnia w przedziale [0; c). Ta cecha wynika z tego, że $f(0) > 0$, $f(x) \neq 0$ w przedziale [0; c), i z następnego twierdzenia analizy matematycznej, należącego do Cauchy'ego.



Rys.7.