Niech funkcja f(x) jest określona i ciągła w przedziale [a; b] i na końcach tego przedziału przyjmuje wartość różnych znaków. Wtedy między „a" i „b" znajduje się punkt „t", w którym funkcja zamienia się w zero.

Dowód twierdzenia przeprowadzono w załączniku (tw.3.). Ma ono bardzo prosty sens geometryczny. Wykres funkcji ciągłej składa się z jednej części; jeden z jego punktów leży niżej od osi odciętych, a drugi wyżej, i dlatego na wykresie powinien być punkt, gdzie on przecina tę oś (rys.7.).
Oczywiście, trzeba wziąć pod uwagę, że intencja geometryczna nie zastępuje dowodu.
Na mocy aksjomatu d) liczba c – ma najmniejszą wartość dodatnią, dla której $f(x) = 0$. Jeżeli założymy, że $f(u) < 0$, $0 < u < c$, to na mocy twierdzenia Cauchy'ego w przedziale [0; u) znalazłby się punkt $t(0 < t < c)$ taki, że $f(t) = 0$.

Ćwiczenia

1. Udowodnić, że dla kosinusa analitycznego f(x) ma miejsce wzór dzielenia argumentu na połowę:
$$f(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}$$
2. Udowodnić, że jeśli f(x) jest kosinusem analitycznym, to
$$f(c-x) = \pm\sqrt{1-f(x)^2}$$

Stwierdzono cały szereg własności kosinusa analitycznego jako następstwo aksjomatów a) – d). Następna własność dowodzi, że rozmaite sposoby wyznaczania funkcji cos x są równoznaczne, ponieważ one nie mogą doprowadzić do różnych funkcji, posiadających dane cechy charakterystyczne.

Własność 6

Nie istnieją dwie różne funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ spełniające dla danego „c" warunki a) – d).
Dla udowodnienia własności korzysta się z metody rozwiązania zadania 9, § 6.
Przypuśćmy, że istnieją funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$, $f_1(x) \equiv f_2(x)$, spełniające aksjomaty a) – d) dla danego „c". Wykażemy, że jeśli $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są zbieżne chociażby dla jednej wartości $x = \alpha$, różnego od zera, to one są zbieżne dla wszystkich wartości x.
To wystarczy, żeby udowodnić własność, ponieważ $f_1(2c) = f_2(2c) = -1$ na mocy (5).
Z (3) dla $x = y = \alpha$ dla każdej z funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ mamy
$$f_1(2\alpha) = 2f^2_1(\alpha) - 1;$$
$$f_2(2\alpha) = 2f^2_2(\alpha) - 1.$$
Ale ponieważ $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, to $f_1(2\alpha) = f_2(2\alpha)$.
Metodą indukcji matematycznej jest łatwo udowodnić, że
$$f_1(n\alpha) = f_2(n\alpha) \qquad \textbf{(6)}$$
dla wszystkich $n \in N$. Po podstawieniu do (3) $x = y = \frac{\alpha}{2}$ otrzymamy
$$f_i(\alpha) + f_i(0) = 2f^2(\frac{\alpha}{2}), \quad i = 1, 2,$$
skąd $f^2_1(\frac{\alpha}{2}) = f^2_2(\frac{\alpha}{2})$. Można uważać, że $0 < \alpha < 2c$, tak, że $f_i(\frac{\alpha}{2}) \geq 0$, $i = 1, 2$,

dlatego $\quad f_1(\frac{\alpha}{2}) = f_2(\frac{\alpha}{2})$

A zatem, jeżeli $0 < 1 \leq 2c$, $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, to $f_1(\frac{\alpha}{2}) = f_2(\frac{\alpha}{2})$.