Przyjmując to twierdzenie m razy, to zgodnie z indukcją otrzymamy

$$f_1\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)=f_2\left(\frac{\alpha}{2^m}\right),\ m\in N$$

Stąd, korzystając z (6), otrzymamy

$$f_1\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right)=f_2\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right) \qquad (7)$$

$n \in N$, $m \in N$. Ta równość jest słuszna i dla $n=0$, ponieważ $f_1(0)=f_2(0)=1$.
Dalej, na mocy parzystości $f_1(x)$ i $f_2(x)$

$$f_1\left(-\frac{n\alpha}{2^m}\right)=f_1\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right)=f_2\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right)=f_2\left(-\frac{n\alpha}{2^m}\right)$$

W ten sposób, równość (7) spełnia się dla wszystkich $m \in N$, $n \in Z$.
Niech teraz x – jest dowolną liczbą rzeczywistą,
α - różni się od zera, dla której to liczby $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$.

Rozłożymy $\frac{x}{\alpha}$ na nieskończony ułamek dwójkowy i zbudujemy ciąg

$\frac{n_1}{2^{m_1}}, \frac{n_2}{2^{m_2}}, \ldots, \frac{n_k}{2^{m_k}}$ jej dwójkowych przybliżeń; $\frac{x}{\alpha}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n}{2^{m_k}}$

Na mocy (7)

$$f_1\left(\frac{n_k}{2^{m_k}}\alpha\right)=f_2\left(\frac{n_k}{2^{m_k}}\alpha\right),\quad k=1,2,\ldots \qquad \textbf{(8)}$$

Ponieważ $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są funkcjami ciągłymi, to

$$\lim_{k\to\infty} f_i\left(\frac{n_k}{2^{m_k}}\alpha\right)=f_i\left(\frac{x}{\alpha}\alpha\right)=f_i(x) \quad i=1,2.$$

Przechodząc do granicy w (8), znajdujemy $f_1(x) = f_2(x)$.
Własność udowodniono.

Nietrudno sprawdzić, że funkcja cos x, określana w szkole geometrycznie, spełnia aksjomaty kosinusa analitycznego dla $c=\frac{\pi}{2}$.

Rzeczywiście,

a) cos x jest ciągły dla wszystkich $x \in R$;
b) warunek (3) wynika z twierdzenia dodawania;
c) $\cos 0=1>0$;
d) $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos x \neq 0$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Na podstawie własności 6 stwierdzamy, że dla $c=\frac{\pi}{2}$ kosinus analityczny jest zbieżny z geometrycznym. Zauważymy, że dla dowolnego $c > 0$ kosinus analityczny jest zbieżny z funkcją $\cos(\frac{\pi}{2}x)$.