

Metryka to wielkość, która określa odległość pomiędzy punktami w przestrzeni. Na przykład, w przestrzeni euklidesowej:

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$dr^2$  oznacza tutaj kwadrat elementu odległości, a  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  to różniczki współrzędnych. W płaskiej czterowymiarowej czasoprzestrzeni stosuje się metrykę Minkowskiego

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Od tego momentu stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina.

[http://pl.wikipedia.org/wiki/Konwencja\\_sumacyjna\\_Einsteina](http://pl.wikipedia.org/wiki/Konwencja_sumacyjna_Einsteina)

Oznaczając  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$  możemy to zapisać w skróconej postaci

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$\eta$  jest macierzą tensora metrycznego.

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

natomiast  $\eta_{\mu\nu}$  jest elementem macierzy, gdzie  $\mu$  wskazują na wiersz,  $\nu$  - kolumnę macierzy.

### Zadanie 1

Dla metryki Minkowskiego wykonaj zamianę zmiennych do współrzędnych sferycznych. Przyjmując  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$  zapisz macierz metryki w tych współrzędnych.

[http://pl.wikipedia.org/wiki/Układ\\_współrzędnych\\_sferycznych](http://pl.wikipedia.org/wiki/Układ_współrzędnych_sferycznych)

*Wskazówka:*

W tym zadaniu może Ci się przydać reguła łańcuchowa:

$$dx^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}\right) d\phi$$

Ważnym pojęciem w ogólnej teorii względności są symbole Christoffela  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in 0, 1, 2, 3$ ). Dla metryki  $g$  o macierzy diagonalnej (takiej, która ma same zera poza główną przekątną) wyrażają się one wzorem:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right)$$

**Zadanie 2**

Wyznacz wszystkie symbole Christoffela dla metryki Minkowskiego we współrzędnych sferycznych.

*Wskazówka:*

Zanim poddasz się pod naporem ogromnej liczby symboli, przypatrz się uważnie macierzy metryki i wzorowi na  $\Gamma$  i zastanów się, które z  $4^3$  symboli mogą być niezerowe. Może się też przydać obserwacja, że  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ .