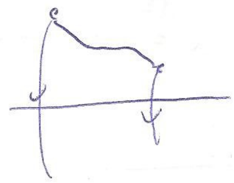
2. Bańki mydlane

Równanie E-L ~~czasami~~ często jest trudne do rozwiązania.

Jednym z trików jest zapisanie go w postaci $F(a,b,b')$ z $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$

Wtedy $\frac{d}{da}\frac{\partial F}{\partial b'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial b'} = \text{const}$



Na przykład dla bańki obracanej wokół osi x:

$$S = \int 2\pi y \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Zamiast tego zapiszmy $\sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+x'^2}\,dy$

$$S = \int \underbrace{2\pi y \sqrt{1+x'^2}}_{F(y,x,x')\text{ bez jawnej zależności od } x}\, dy$$

Zatem mamy $\frac{\partial F}{\partial x'} = \text{const} \Rightarrow \frac{yx'}{\sqrt{1+x'^2}} = c_1 \Rightarrow x' = \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}$

$$\Rightarrow x = c_1 \cosh^{-1}\frac{y}{c_1} + c_2 \Rightarrow \boxed{y = c_1 \cosh\frac{x-c_2}{c_1}}$$

3. Brachistochrona

$$I = \int \frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}\,dx \;; \quad \text{ZZE}: v(y) = \sqrt{2gy}$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{2gy}}\sqrt{1+y'^2}\,dx \overset{\text{ten sam trik}}{=} \int \underbrace{\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}}_{F(y,x,x')} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}}\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x'} = C$$

$$\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}} = \sqrt{c} \Rightarrow x' = \sqrt{\frac{cy}{1-cy}} \Rightarrow dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{y/c - y^2}}$$

believe it or not, $\boxed{x = -\sqrt{y/c - y^2} - \frac{1}{2c}\arccos(1-2cy) + c'}$

$c' = 0$ bo przechodzi przez 0

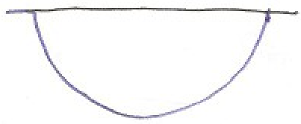
Jeśli wprowadzimy zmienną $\theta = \arccos(1-2cy)$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2c}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{y}{c} - y^2 = \frac{1}{4c^2}\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2c}(\theta - \sin\theta) \\ y &= \frac{1}{2c}(1-\cos\theta) \end{aligned}}$$

krzywa brachistochrona jest cykloidą



NB Powyższy problem został przedstawiony jako zagadka w czasopiśmie przez Johanna Bernoulliego w 1696 roku. (jakby zakładów dziełu)

Rozwiązało ją 5 osób: Newton
Jakob Bernoulli
Leibniz
Tschirnhaus (wynalazca porcelany :-))
Legrange

Ich rozwiązania zapoczątkowały całą znaną dziś dziedzinę matematyki.

Sferyczne

$$d\vec{r} = \hat{r}\, dr + \hat{\theta}\, r\, d\theta + \hat{\phi}\, r \sin\theta\, d\phi$$

$$|d\vec{r}|^2 = \cancel{dr^2} + (\overset{a}{\cancel{r}}\, d\theta)^2 + (\overset{a}{\cancel{r}} \sin\theta\, d\phi)^2$$

$$|ds| = \cancel{\sqrt{a^2}} \quad a\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2}$$

Możemy na 2 sposoby

$$a\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}\; d\phi$$

$$\cancel{F(\theta, \theta')} \quad F(\phi, \theta, \theta')$$

$$a\sqrt{1 + \sin^2\theta\, \phi'^2}\; d\theta$$

$$F(\theta, \phi, \phi')$$

brak jawnej zależności!

Równanie E-L:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi'} = K \to \frac{1}{2}\left(1 + \sin^2\theta\, \phi'^2\right)^{-1/2} \times 2\phi' \sin^2\theta = K$$

$$\frac{\sin^2\theta\, \phi'}{\sqrt{(1 + \sin^2\theta\, \phi'^2)}} = K$$

Podstawienie

$$\omega^2 = \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1 \; ; \; \frac{1}{\sin^2\theta} = \omega^2 + 1$$

$$w = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \cancel{\to \sin\theta = \frac{\cos\theta}{w} \; ; \; \sin^2\theta =}$$

$$\phi' = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{d\phi}{dw}\frac{dw}{d\theta} \; ; \; \frac{dw}{d\theta} = \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\phi' = -\frac{d\phi}{dw} \times \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$K = \frac{-\,d\phi/dw}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\phi}{dw}\right)^2 \times \frac{1}{\sin^2\theta}}} = \frac{-\phi'}{\sqrt{1 + \phi'^2(\omega^2 + 1)}}$$

$$\cancel{K^2\left(1 + \phi'^2(\omega^2+1)\right) = \phi'^2 \Rightarrow \phi'^2(1 - K^2\omega^2 - K^2) = K^2\phi'^2\omega^2}$$

$$\cancel{\phi'^2(1 - K^2) = K^2 + \phi'^2\omega^2 K^2}$$

$$K^2 = \phi'^2\left(1 - K^2 - K^2\omega^2\right) \; ; \; \cancel{\phi'} = \boxed{\frac{d\phi}{dw} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-K^2}{K^2}\right) - \omega^2}}}$$

$$\frac{d\phi}{dW} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}} \; ; \; \phi = \int \frac{dW}{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}} = \sin^{-1}\frac{\omega}{\alpha} + \beta$$

$$\omega = \alpha \sin(\phi - \beta) \; ; \; \boxed{\cot\theta = \alpha \sin(\phi-\beta)}$$

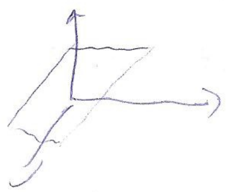
Dlaczego koło wielkie?

Płaszczyzna przez $(0,0,0)$: $\cancel{ax+}$ $z = ax + by$

$\underline{N} \cdot \underline{n} = 0$

Sfera : $|r| = A$

$x^2+y^2+z^2 = A^2$



$x = A \sin\theta \cos\phi$
$y = A \sin\theta \sin\phi$

$$\cancel{A}\cos\theta = a\cancel{A}\sin\theta\cos\phi + b\cancel{A}\sin\theta\sin\phi$$

$$\downarrow$$

$$\cot\theta = a\cos\phi + b\sin\phi$$