Część 1: Rachunek wariacyjny

Maciej Malinowski

21 lipca 2012

1 Równanie Eulera

1.1 Przypadek jednej funkcji

Rozważmy funkcjonał

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{1.1}$$

gdzie:

- $y'(x)$ oznacza $\frac{dy}{dx}$
- $y(x)$ ma ciągłe pierwszą i drugą pochodną.
- F ma ciągłe pochodne cząstkowe.

Niech $\eta(x)$ będzie dowolną funkcją spełniającą te same założenia co $y(x)$ oraz dodatkowo $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Niech $Y(x) = y(x) + \epsilon\eta(x)$.

Definicja 1. *Funkcjonał $I(y)$ przyjmuje wartość stacjonarną dla funkcji $y(x)$ jeśli zachodzi*

$$\left.\frac{dI(Y)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \tag{1.2}$$

dla dowolnej (spełniającej powyższe warunki) krzywej $Y(x)$

Korzystając z tej definicji wyprowadzamy **równanie Eulera**

Twierdzenie 1. *Funkcjonał* $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx$ *przyjmuje wartość stacjonarną gdy*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

Należy się teraz kilka uwag:

- Nie ma łatwego sposobu sprawdzenia, czy dana krzywa jest lokalnym minimum, maksimum czy żadnym z tych. Zwykle trzeba odwoływać się do innych argumentów.
- Chociaż używaliśmy oznaczeń x i y, równanie to oczywiście działa przy dowolnej parametryzacji, nie tylko w układzie kartezjańskim.
- Czasami szukana krzywa ekstremalna nie będzie funkcją $y(x)$ (np. okrąg jednostkowy) i wtedy trzeba zmienić układ odniesienia (np. na biegunowy).

1.2 Przypadek wielu funkcji

Rozważyliśmy przypadek, gdy funkcjonał zależy od jednej zmiennej, x, oraz jednej funkcji tej zmiennej, $y(x)$. Takie samo rozumowanie pozwala nam jednak sformułować ekwiwalent twierdzenia 1 na przypadek funkcjonały zależnego od wielu zmiennych

Twierdzenie 2. *Funkcjonał* $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, y_n, y_n')dx$ *przyjmuje wartość stacjonarną, gdy dla każdego i*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \tag{1.4}$$

1.3 Przydatne własności

W przypadku ogólnym równanie Eulera jest trudne (bądź niemożliwe) do rozwiązania. Istnieje kilka technik, które pozwalają uprościć pracę z tymi równaniami.
Dzisiaj będziemy starali się tak dobierać zmienne, by funkcja $F(x, y, y')$ nie zależała w jawny sposób od y. Wtedy równanie Eulera upraszcza się do:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = const \tag{1.5}$$

lewa strona powyższego równania nazywana jest *pierwszą całką równania Eulera.*
Gdy będziemy zajmować się mechaniką, będziemy mieli mniej swobody przy manipulacji zmiennymi i czasami przydatna okaże się tzw. *tożsamość Beltramiego* (więcej o tym w części 4): jeśli F nie zależy w jawny sposób od x, to

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = const \tag{1.6}$$

2 Przykłady zastosowań

2.1 Najkrótsza droga po stożku

Stożek dany jest we współrzędnych biegunowych (r, θ, z) poprzez $z^2 = 8r^2$. Udowodnij, że linia geodezyjna (najkrótsza krzywa łącząca dwa punkty) na tym stożku dana jest równaniem $r\cos(\theta + \alpha) = K$, gdzie α i K są stałymi zależącymi od wyboru punktów końcowych.

2.2 Bańka mydlana

Mydlana błona łączy dwie obręcze o wspólnej osi symetrii (oś X). Bańka przyjmuje kształt taki, by zminimalizować swoją powierzchnię. Udowodnij, że jej powierzchnia w tym wypadku powstaje w wyniku obrotu krzywej $y = A\cosh\frac{x-B}{A}$, gdzie A i B są stałymi, wokół osi x.

Do zastanowienia Taka krzywa nie może istnieć, jeśli obręcze są za daleko. Jakie jest ograniczenie na ich odstęp w przypadku obręczy o równych promieniach? Czy bańka po prostu pęknie, czy zamiast tego będzie próbowała przenieść się wewnątrz obręczy?

2.3 Brachistochrona

Udowodnij, że krzywa, po której ciało najszybciej zjedzie pod wpływem siły grawitacji między dwoma danymi punktami, jest cykloidą i może być parametrycznie zapisana jako

$$x = \frac{1}{2c}(\phi - \sin\phi)$$
$$y = \frac{1}{2c}(1 - \cos\phi)$$

Historia Problem ten został przedstawiony jako zagadka w czasopismie przez Johanna Bernoulliego w 1696 roku. Rozwiązało go wtedy 5 osób: I. Newton, J. Bernoulli (młodszy brat autora zagadki), G. W. Leibniz, E. W. von Tschirnhaus i J. S. Lagrange. Ich rozwiązania zapoczątkowały omawianą dziś dziedzinę matematyki.