Część 3: Zadania

Maciej Malinowski

21 lipca 2012

1 Wahadło w kosmosie

Astronauta na międzynarodowej stacji kosmicznej postanowił zbudować zegar z wahadłem. Przyczepił ciężarek o masie M na końcu lekkiego pręta o długości L, a drugi koniec pręta chwycił robotycznym ramieniem o długości R. Jeśli ramię obraca się ze stałą prędkością kątową ω, a drgania wahadła ograniczone są do płaszczyzny obrotu ramienia:

- Czy wyhylenie $\theta(t)$ wahadła może przypominać wychylenie wahadła matematycznego w jednorodnym polu grawitacyjnym?
- Jeśli tak, to jaka prędkość kątowa jest konieczna, by wahadło miało taki sam okres, jak na ziemi?
- Czy powyższe konkluzje wprowadzają jakieś ograniczenia na L i θ w porównaniu do R (zakładamy, że wahadło nie zderzy się z ramieniem)?

2 Tautochrona

Już w 1851. roku w powieści „Moby Dick or the Whale" Hermana Melville'a czytamy: „*[The try-pot] is also a place for profound mathematical meditation. It was in the left-hand try-pot of the Pequod, with the soapstone diligently circling round me, that I was first indirectly struck by the remarkable fact, that in geometry all bodies gliding along a cycloid, my soapstone, for example, will descend from any point in precisely the same time*".

- Pokaż, że trajektoria $x(\phi)$, $y(\phi)$ punktu na toczącym się bez poślizgu kole o promieniu a może być przedstawiona jako:

$$x = a(\phi - \sin\phi)$$
$$y = a(1 + \cos\phi)$$

- Ciężarek o masie M porusza się bez tarcia po powyższej cykloidzie w pionowym polu grawitacyjnym. Zapisz jego Lagranżjan jako funkcję ϕ.

- Korzystając z podstawienia $u = \cos\frac{\phi}{2}$ pokaż, że czas potrzebny na spadek ciężarka (z zerową prędkością początkową) z dowolnej wysokości jest jednakowy i znajdź ten czas.

REMARK Rysunek przedstawia schemat zegara skonstruowanego przez Huygensa w XVII wieku.

3 Walec, równia, ciężarek i bloczek (OF 2010/2011, etap 2, T3)

Przy oznaczeniach jak na rysunku:

- Zapisz położenia, a następnie energię kinetyczną i potencjalną, każdego z elementów, za pomocą współrzędnych ugólnionych $(a, \dot{a}, b, \dot{b})$

- Zapisz Lagranżjan układu i znajdź przyspieszenie klina

4 Rozwijanie nici

Punktowa masa m znajduje się na końcu lekkiej i długiej nici owiniętej wokół nieruchomego walca o promieniu R. W chwili $t = 0$ przylegający do cylindra ciężarek dostaje radialny impuls nadający mu prędkość v_0. Ruch odbywa się w jednym wymiarze, punkt P jest punktem na walcu, którego początkowo dotykał ciężarek, a Q jest ostatnim punktem, w którym w danej chwili nić dotyka walca. Kąt między P i Q oznaczmy jako θ.

- Znajdź lagranżjan ciężarka jako funkcję θ i $\dot{\theta}$. Jeśli zrobiłeś to poprzez zapisanie położenia cząstki we współrzędnych kartezjańskich - czy widzisz, jak można go było znaleźć szybciej, choć niekoniecznie prościej?

- Znajdź kąt θ jako funkcję czasu. Czy moment pędu ciężarka względem środka walca jest stały? A co z energią?

- Teraz załóż, że walec ma masę M i może się obracać wokół swojej osi symetrii. Oznacz kąt obrotu punktu P jako ϕ. Zapisz Lagranżjan układu i znajdź zachowane wartości.

- Korzystając z tych zasad zachowania wyprowadź następujące równanie ruchu:

$$\frac{\dot{\theta}^2\theta^2}{\theta^2 + \alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

  gdzie $\alpha = 1 + \frac{M}{m}$ i $\beta = \frac{v_0^2}{R^2}$. Spierwiastkuj je i zcałkuj stronami, by znaleźć $\theta(t)$.

REMARK Można zauważyć, że w tym zadaniu nie było żadnego potencjału, czyli lagranżjan był po prostu energią kinetyczną, a mimo wszystko techniki i twierdzenia wypracowane na poprzednim wykładzie okazały się bardzo użyteczne.

5 KORALIK NA OBRĘCZY

Obręcz o promieniu R kręci się wokół osi symetrii ze stałą prędkością kątową ω. Na obręcz nanizany jest koralik o masie M, który może poruszać się po niej bez tarcia.

- Zapisz energię kinetyczną koralika we współrzędnych sferycznych. Znajdź lagranżjan i określ potencjał efektywny (jak w grawitacji)
- Znajdź 3 położenia równowagi i określ, czy są stabilne
- Dla stabilnych położeń równowagi, znajdź częstotliwość małych oscylacji wokół nich.
- Czy energia koralika jest stała?

REMARK Na następnym wykładzie dowiemy się, że w takim układzie hamiltonian

$$H = (\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - L$$

jest stałą ruchu.