Część 4: Zasady zachowania i co dalej

Maciej Malinowski

31 lipca 2012

0 NOTACJA

Celem łatwości zapisu będziemy stosować notację wektorową.

- Będziemy stosować oznaczenie $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ oraz $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ (analogicznie inne pochodne)
- Lagranżjan układu n cząstek zapiszemy w tej notacji jako $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$
- Mnożenie również zapiszemy w ten sposób: $\mathbf{q}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = q_1\frac{\partial L}{\partial q_1} + \ldots + q_n\frac{\partial L}{\partial q_n}$
- W razie wątpliwości - pytaj!

1 ZASADY ZACHOWANIA

1.1 HAMILTONIAN I WSPÓŁRZĘDNE CYKLICZNE

Definicja 1. *Funkcja $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ jest stałą ruchu jeśli dla rzeczywistej trajektorii układu $\mathbf{q}(t)$ zachodzi* $\frac{dC}{dt} = 0$

Najprostszym przykładem zasady zachowania są współrzędne cykliczne:

Twierdzenie 1. *Jeśli $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$, to $C(\dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ jest stałą ruchu*

Być może na koniec zdążymy powiedzieć o mechanice Hamiltona. Teraz już można jednak zdefiniować Hamiltonian:

Definicja 2. *Hamiltonian układu zdefiniowany jest jako*

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, t) = \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{1.1}$$

Nie należy się na razie przejmować tym, że Hamiltonian jest funkcją jakiś dziwnych zmiennych - to wszystko przyjdzie później. Pamiętaj też o notacji wektorowej!

Hamiltonian jest zachowany, jeśli Lagranżjan nie zależy jawnie od czasu. W bardzo wielu układach - ale nie we wszystkich - będzie on wyrażał zasadę zachowania energii

Twierdzenie 2. *Jeśli* $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$*, to* H *jest stałą ruchu*

Spotkaliśmy się już z tym przy okazji tożsamości Beltramiego

1.2 Twierdzenie Noether

Wyraża zależność między zasadami zachowania a symetriami Lagranżjanu.

Definicja 3. *Symetrią Lagranżjanu nazywamy taką (wektorową) funkcję* $\mathbf{K}(\mathbf{q})$*, że przy Lagrangian nie zmienia się przy infinitezymalnej transformacji współrzędnych* $\mathbf{q} \to \mathbf{q} + \epsilon \mathbf{K}(\mathbf{q})$*, czyli że przy takiej transformacji* $\left.\frac{dL}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$

Na przykład Lagranżjan $L = (5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2) + (2x - y)$ ma symetrię $(1, 2)$

Twierdzenie 3 (Noether)**.** *Jeśli* $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ *jest symetrią lagranżjanu, to* $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{K}(\mathbf{q})$ *jest stałą ruchu*

Na przykład powyższy lagranżjan ma stałą ruchu $C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} + \dot{y}$