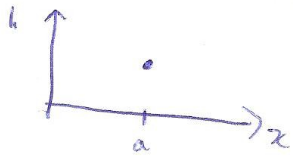
Okazuje się, że ~~potencjalnie~~ pozornie oczywisty fakt

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\, h(x)\, dx = 0 \quad \forall \eta(x) : \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \ \forall_{x \in (x_1, x_2)}$$

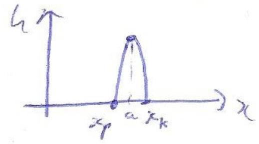
ma swój urok, więc go udowodnijmy!

Dowód

ZNW $h(a) \neq 0$.



Ponieważ h jest gładka, wygląda to tak:



Czyli na przedziale (x_p, x_k) $h(x) \neq 0$

Widzimy teraz, że jeśli skonstruujemy η, które wygląda jak h, ale jest przerabiane, by spełniało warunki $h(x_p) = h(x_k) = 0$ i było ciągłe, to dostaniemy pole > 0

Zatem: $\eta(x) = h(x) \cdot \begin{cases} (x_k - x)(x - x_p) & \text{dla } x_p < x < x_k \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$

$(x_k - x)(x - x_p)$ jest zawsze dodatnie, η jest ciągłe również na granicy

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) h(x)\, dx = \int_{x_p}^{x_k} \underbrace{h^2(x)}_{>0} \underbrace{(x_k - x)(x - x_p)}_{>0} dx > 0$$

Czyli kiedy $h(a) > 0 \Rightarrow \exists\, \eta(x)$ że $\int \ldots > 0 \Rightarrow$ sprzeczność z założeniem :)