π jako prawda o liczbie dzielników

Damian Orlef

9. Wielodyscyplinarne Warsztaty Wakacyjne, 17.08.2013

Skrót treści

Wzór Leibniza

Oto nasz cel:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Liczba jako suma kwadratów

Dla $n \in \mathbb{Z}_+$ oznaczmy liczbę przedstawień n w postaci sumy dwóch kwadratów przez:

$$r_2(n) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 | a^2 + b^2 = n\}$$

Przykładowo $r_2(5) = 8$, gdyż
$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$

Widzialna własność $r_2(n)$

Niech N będzie duże i naturalne, przyjrzyjmy się kołu o środku w $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{N}$.
Przy pomocy punktów kratowych wewnątrz koła szacujemy pole.

$$r_2(1) + r_2(2) + \ldots + r_2(N) \approx \pi \cdot N$$

Po podzieleniu obustronnie przez N otrzymamy

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{r_2(1) + r_2(2) + \ldots + r_2(N)}{N} = \pi$$

Widzialna własnosć $r_2(n)$

Niech N będzie duże i naturalne, przyjrzyjmy się kołu o środku w $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt{N}$.
Przy pomocy punktów kratowych wewnątrz koła szacujemy pole.

$$r_2(1) + r_2(2) + \ldots + r_2(N) \approx \pi \cdot N$$

Po podzieleniu obustronnie przez N otrzymamy

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{r_2(1) + r_2(2) + \ldots + r_2(N)}{N} = \pi$$

Niewidzialna własność $r_2(n)$

Dla n dodatnich zachodzi

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)),$$

gdzie $d_r(n)$ jest liczbą dzielników dodatnich n przystających do r modulo 4.
Przykładowo $d_1(5) = 2$, $d_3(5) = 0$, więc $r_2(5) = 4(2 - 0) = 8$.

Niewidzialna własność $r_2(n)$

Dla n dodatnich zachodzi

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)),$$

gdzie $d_r(n)$ jest liczbą dzielników dodatnich n przystających do r modulo 4.
Przykładowo $d_1(5) = 2$, $d_3(5) = 0$, więc $r_2(5) = 4(2 - 0) = 8$.

Połączenie własności niewidzialnej z widzialną

Mieliśmy:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{r_2(1) + r_2(2) + \ldots + r_2(N)}{N} = \pi$$

Dostajemy:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(d_1(1) + \ldots + d_1(N)) - (d_3(1) + \ldots + d_3(N))}{N} = \frac{\pi}{4}$$

Połączenie własności niewidzialnej z widzialną

Mieliśmy:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{r_2(1) + r_2(2) + \ldots + r_2(N)}{N} = \pi$$

Dostajemy:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{(d_1(1) + \ldots + d_1(N)) - (d_3(1) + \ldots + d_3(N))}{N} = \frac{\pi}{4}$$

Zmiana kolejności

Suma $d_1(1) + \ldots + d_1(N)$ to sumaryczna liczba (wielokrotnie liczonych) dzielników postaci $4k + 1$ liczb od 1 do N, więc można tę sumę też wyrazić z perspektywy zliczania po konkretnych dzielnikach jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{4k+1} \right\rfloor$$

Podobnie przekształcimy $d_3(1) + \ldots + d_3(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{4k+3} \right\rfloor$

Zmiana kolejności

Suma $d_1(1) + \ldots + d_1(N)$ to sumaryczna liczba (wielokrotnie liczonych) dzielników postaci $4k + 1$ liczb od 1 do N, więc można tę sumę też wyrazić z perspektywy zliczania po konkretnych dzielnikach jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{4k+1} \right\rfloor$$

Podobnie przekształcimy $d_3(1) + \ldots + d_3(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{4k+3} \right\rfloor$

Ostateczne starcie

Zamieniamy

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(d_1(1)+\ldots+d_1(N))-(d_3(1)+\ldots+d_3(N))}{N} = \frac{\pi}{4}$$

na

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left\lfloor \frac{N}{4k+1}\right\rfloor - \sum_{k=0}^{\infty}\left\lfloor \frac{N}{4k+3}\right\rfloor}{N} = \frac{\pi}{4},$$

zaś z uwagi na $\frac{\left\lfloor \frac{N}{d}\right\rfloor}{N} \to \frac{1}{d}$, przekonujemy się łatwo, że zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ostateczne starcie

Zamieniamy

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(d_1(1)+\ldots+d_1(N))-(d_3(1)+\ldots+d_3(N))}{N} = \frac{\pi}{4}$$

na

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{4k+1} \right\rfloor - \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{4k+3} \right\rfloor}{N} = \frac{\pi}{4},$$

zaś z uwagi na $\frac{\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor}{N} \to \frac{1}{d}$, przekonujemy się łatwo, że zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Ostrzeżenie

Dowód tutaj przedstawiony to trochę ściema! Ale daje się go uściślić z zachowaniem tego samego sensu.