Zadania kwalifikacyjne

Zadania kwalifikacyjne dotyczą trzech działów matematyki: algebry, teorii liczb i kombinatoryki. Do kwalifikacji wystarczy na pewno zrobienie sześciu zadań, przy czym z każdego działu należy zrobić przynajmniej jedno.

Rozwiązania należy wysyłać na adres: ohorawa 'at' gmail.com najpóźniej do 7 lipca 2013. Rozwiązania przysłane przed 1 lipca 2013 będzie można poprawiać. Jeśli macie jakiekolwiek pytania, piszcie!

1 Algebra

Operacja binarna $\circ$ na zbiorze X to funkcja $\circ\colon X \times X \to X$. Dla uproszczenia wartość funkcji $\circ$ na parze (x, y) oznaczamy $x \circ y$.

Operacja $\circ$ na zbiorze X jest:

- *unitarna*, jeśli dla pewnego elementu $1 \in X$ i dowolnego $x \in X$ mamy $(1 \circ x) = x = (x \circ 1)$.
- *przemienna*, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in X$ mamy $x \circ y = y \circ x$.

(1.1) Niech $\circ$ będzie operacją binarną na zbiorze X. Pokaż, że jeśli $x \circ (y \circ x) = y$ dla dowolnych $x, y \in X$, to także $(x \circ y) \circ x = y$ dla dowolnych $x, y \in X$.

(1.2) Podaj elementy i moc zbioru A izometrii n-kąta foremnego. Znajdź najmniejszy podzbiór $A' \subseteq A$ o tej własności, że dowolny element A można otrzymać jako złożenie elementów A', to jest dla dowolnego $a \in A$ istnieją $k \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A'$ takie, że $a = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k$.

(1.3) Niech $\circ$ oraz $\star$ będą operacjami binarnymi na zbiorze X. Pokaż, że jeśli:

(a) $\circ$ oraz $\star$ są unitarne,

(b) dla dowolnych $a, b, c, d \in X$ mamy $(a \circ b) \star (c \circ d) = (a \star c) \circ (b \star d)$,

to operacje $\circ$ oraz $\star$ są tożsame i przemienne.

2 Teoria liczb

(2.1) Niech liczba całkowita n daje resztę 1 lub -1 z dzielenia przez 6. Pokaż, że wówczas $43 | 7^n - 6^n - 1$ i w związku z tym dla dowolnej liczby pierwszej $p > 3$ zachodzi $43 | 7^p - 6^p - 1$.

(2.2) Pokaż, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 5$ zachodzi $(p-1)^2 | (p-1)!$.

(2.3) Znajdź rozwiązania równania $(p-1)! + 1 = p^m$ dla $m \in \mathbb{N}$ oraz liczby pierwszej p.

3 Kombinatoryka

(3.1) Znajdź liczbę różnych grafów 4-wierzchołkowych nieskierowanych, bez wielokrotnych krawędzi i pętli.

(3.2) Dana jest szachownica $n \times n$. Każdy z wierzchołków jej kwadratowych pól ma zostać pokolorowany jednym z dwóch kolorów (czerwony lub niebieski). Znajdź liczbę kolorowań tej szachownicy takich, że każde kwadratowe pole ma dokładnie dwa czerwone wierzchołki.

(3.3) Dla ciągu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ podzbiorów zbioru $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ oraz permutacji σ zbioru $[k]$, definiujemy *zbiór diagonalny*

$$D_\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_k) := \{i \in [k] \mid i \notin A_{\sigma(i)}\}.$$

Niech $n(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ będzie liczbą podzbiorów $A \subseteq [k]$ takich, że istnieje permutacja σ, dla której:

$$A = D_\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_k).$$

Znajdź parami różne podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq [k]$, dla których wartość $n(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ jest największa.