Topologia kombinatoryczna — zadania kwalifikacyjne

Piotr Suwara

9 czerwca 2013

Nie ma wyznaczonego progu na kwalifikację na zajęcia. Gorąco zachęcam do wysyłania rozwiązań dużo przed terminem – wtedy będzie można się mnie poradzić i spróbować poprawić błędy. Nie wahajcie też zadawać pytań.

Zadania z gwiazdką mają wartość $1,5$ zadania bez gwiazdki – nie dlatego, że są najłatwiejsze czy najtrudniejsze, ale dlatego, że są najważniejsze dla przygotowania się do zajęć. Można wobec tego zdobyć $8 \cdot 1,5 + 9 = 21$ punktów, zadania są raczej łatwe, więc wypadałoby zdobyć co najmniej 10 punktów, zaś zdobycie 18 punktów zapewnia kwalifikację.

Nie we wszystkich zadaniach trzeba podawać dokładny dowód! Szczegóły są opisane w treściach.

Pytania i rozwiązania przesyłajcie na adres peter_de_sowaro(na)o2(kropa)pl do 7 lipca.

1 Ciągłość

Zadanie 1. Udowodnij, że równanie $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1 = 0$ ma co najmniej jeden ujemny pierwiastek (rozwiązanie).

Definicja 1 (odległość euklidesowa)**.** *Odległość euklidesowa* między dwoma punktami $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, wynosi

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \tag{1}$$

Definicja 2 (ciągłość w punkcie)**.** Funkcja $f : A \to B$ jest *ciągła w punkcie* x_0, jeśli dla każdego punktu x „blisko” x_0, $f(x)$ jest „blisko” $f(x_0)$.

Dokładniej, f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że dla każdego x w odległości mniejszej niż δ od x_0, $f(x)$ jest w odległości mniejszej niż ε od $f(x_0)$.

Oczywiście na A oraz B muszą być zdefiniowane odległości, na przykład mogą to być podzbiory przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Właściwie nie będziemy się zajmowali innymi przypadkami – te są już wystarczająco ciekawe.

Definicja 3 (ciągłość)**.** Funkcja $f : A \to B$ jest *ciągła*, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in A$.

Zadanie 2. Niech A będzie brzegiem trójkąta równobocznego, zaś B – opisanym na nim okręgiem. $p(x)$ to punkt przecięcia półprostej wychodzącej ze środka tego okręgu, przechodzącej przez punkt x, z tym okręgiem. Udowodnij, że funkcja $p : A \to B$ jest ciągła.

Definicja 4 (bijekcja)**.** Funkcja $f : A \to B$ jest *bijekcją*, jeśli przeciwobrazem każdego punktu z B jest jeden punkt.

Oczywiście, jeśli funkcja $f : A \to B$ jest bijekcją, to istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : B \to A$ taka, że $f^{-1}(f(X)) = x$ dla każdego $X \in A$ oraz $f(f^{-1}(Y)) = Y$ dla każdego $Y \in B$.

Definicja 5 (homeomorfizm)**.** $f : A \to B$ jest *homeomorfizmem*, jeśli f jest bijekcją, f jest ciągłe oraz f^{-1} jest ciągłe.

Zadanie 3. Podaj przykład funkcji $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, takiej, która jest bijekcją i jest ciągła, ale funkcja do niej odwrotna nie jest ciągła (n, m, A, B możesz wybrać dowolne). Udowodnij, że funkcja odwrotna do podanej przez Ciebie nie jest ciągła.

Definicja 6 (kula)**.** *Kulą* w A, o środku w X i promieniu r, nazywamy zbiór

$$A \supset D_r(X) = \{Y \in A : d(X, Y) < r\}.$$

Kulę o środku w punkcie X będziemy często nazywali *otoczeniem* X.

Zadanie* 4. Znajdź homeomorfizm $f : D_1((0, 0)) \to \mathbb{R}^2$ otwartego dysku o promieniu 1 na płaszczyźnie z tą płaszczyzną.

Definicja 7 (spójność)**.** Mówimy, że zbiór A jest *niespójny*, jeśli istnieją dwa podzbiory $B_1, B_2 \subset A$ takie, że:

- pokrywają całą przestrzeń: $B_1 \cup B_2 = A$,
- nie posiadają punktów wspólnych: $B_1 \cap B_2 = \varnothing$,
- dla $i = 1, 2$, dla każdego punktu $X \in B_i$ pewne jego otoczenie zawiera się w B_i, tj. istnieje takie $r > 0$, że $D_r(X) \subset B_i$.

W przeciwnym wypadku mówimy, że zbiór jest spójny.

Zadanie* 5. Udowodnij, że zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest niespójny.

Definicja 8 (homeomorficzność)**.** A, B są *homeomorficzne*, jeśli istnieje homeomorfizm $f : A \to B$.

Zadanie* 6. Udowodnij, że litery I oraz O nie są homeomorficzne.

Uwaga: litery traktujemy jako sumy łuków i odcinków, rozważamy najprostrzy możliwy krój liter (czyli I to po prostu odcinek, O to okrąg, etc.).

Zadanie 7. Podziel litery A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, na zbiory parami homeomorficznych liter.

Możliwie krótko uzasadnij ten podział.

2 Torus

Definicja 9 (dwuwymiarowy torus)**.** *Torus* $\mathbb{T}^2$ to następujący podzbiór przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ (współrzędne x, y, z):

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x, y, z) : \left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Zadanie* 8. Zdefiniujmy $T = \{(\cos\phi, \sin\phi, \cos\psi, \sin\psi) : \phi, \psi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Zapisz wzorem homeomorfizm $f : T \to \mathbb{T}^2$.

Uwaga: ciągłość tego odwzorowania powinna być oczywista ze wzoru, ciągłości odwzorowania odwrotnego nie musisz uzasadniać.

Zadanie 9. Niech $A_1 = \{(x, 0, z) : (x - 4)^2 + z^2 = 1\}$, $A_2 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 9\}$. Są to dwa okręgi zawarte w $\mathbb{T}^2$.

Znajdź homeomorfizm $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, który przeprowadza okrąg A_1 na A_2.

3 Grafy

Zadanie 10. Udowodnij, że każdy spójny graf można narysować „jednym pociągnięciem”, zakładając, że przez każdą krawędź mamy „przejechać” dokładnie dwa razy.

Zadanie* 11. Udowodnij, że w grafie, w którym stopień każdego wierzchołka jest równy co najmniej 2, istnieje cykl homeomorficzny z okręgiem, czyli taki cykl o niezerowej długości, w którym każdy wierzchołek występuje co najwyżej 1 raz.

Definicja 10. *Charakterystyką Eulera grafu* G nazwiemy różnicę $\chi(G) = V - E$ między liczbą jego wierzchołków V a liczbą krawędzi E.

Zadanie 12. Rozważ graf o wierzchołkach $V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, W_3$ o dokładnie 9 krawędziach: dla każdych $i, j \in \{1, 2, 3\}$ istnieje krawędź między V_i a W_j.

Skądinąd wiadomo, że ten graf nie jest planarny – nie da się go narysować na płaszczyźnie bez samoprzecięć.

Pokaż, że ten graf można narysować na wstędze Möbiusa bez samoprzecięć (uwaga: jeśli rysujesz coś na wstędze Möbiusa, to pojawia się to po obu jej stronach – nie ma ona żadnej „grubości”).

4 Homotopia

Definicja 11 (krzywa)**.** *Krzywa* to odwzorowanie ciągłe z domkniętego odcinka w dowolną przestrzeń: $\gamma : [0, 1] \to A$.

Definicja 12 (pętla)**.** *Pętlą* nazywamy krzywą γ zaczynającą i kończącą się w tym samym punkcie, tj. $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definicja 13 (homotopia)**.** *Homotopia* łącząca krzywe $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to A$ o tych samych końcach $Y = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $Z = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, to ciągła funkcja $H(t, x)$ z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1] = \{(t, x) : t \in [0, 1], x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ do A (piszemy $H : [0, 1] \times [0, 1] \to A$), taka, że

- $\gamma_0(x) = H(0, x)$,
- $\gamma_1(x) = H(1, x)$,
- $H(t, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) = Y$ oraz

- $H(t,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = Z$.

Czyli $H(t,x)$ dla ustalonego t to krzywa łącząca punkt Y z punktem Z zawarta w A, $H(0,x)$ to γ_0, $H(1,x)$ to γ_1, i $H(t,x)$ jest ciągłe.

Piszemy też $H_t(x) = H(t,x)$. Parametr t często nazywa się czasem, a homotopię interpretuje się jako deformację krzywej w czasie, z ustalonymi punktami początkowym i końcowym.

Zadanie* 13. Niech pętla $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem o środku w punkcie 0, $\gamma_0(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Zapisz wzorem homotopię łączącą pętlę γ_0 z pętlą stałą, będącą punktem: $\gamma_1(x) = (1,0)$ (musisz równocześnie „ściągać" wszystkie punkty do $(1,0)$).

Zadanie* 14. Jako $S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ oznaczamy sferę (dwuwymiarową).

Zdefiniujmy $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to S^2$, mianowicie $\gamma_0(x) = (\cos(\pi x), \sin(\pi x), 0)$, $\gamma_1(x) = (\cos(\pi x), -\sin(\pi x), 0)$. Znajdź homotopię w S^2 między tymi krzywymi (ciągłą deformację jednej w drugą na S^2, zachowującą punkty początkowy i końcowy).

5 Inne

Zadanie 15. Wstęga Möbiusa może być opisana jako podzbiór $\mathbb{R}^3$:

$$M = \{4(\cos\phi, \sin\phi, 0) + r[\cos(\phi/2)(\cos\phi, \sin\phi, 0) + (0,0,\sin(\phi/2))] : \phi \in \mathbb{R}, r \in (-1,1)\}.$$

Zachęcam do naszkicowania. Jest to odcinek o długości 2, który obracamy wokół okręgu o promieniu 4, sparametryzowanego przez kąt ϕ. W chwili, gdy przebyliśmy na tym okręgu kąt ϕ, odcinek jest nachylony o kąt $\phi/2$, a gdy wykonamy pełny obrót o 2π, odcinek wykona obrót o kąt półpełny, π. Jest to więc prostokątny pasek, którego końce sklejamy, okręcając je raz wokół siebie.

Zastanawiające jest, co się dzieje, gdy przed sklejeniem przekręcimy pasek n razy:

$$M_n = \{4(\cos\phi, \sin\phi, 0) + r[\cos(n\phi/2)(\cos\phi, \sin\phi, 0) + (0,0,\sin(n\phi/2))] : \phi \in \mathbb{R}, r \in (-1,1)\}.$$

Oczywiście $M = M_1$ to wspomniana wstęga Möbiusa. Które z obiektów M_{-1}, M_0, M_1, M_2 są do siebie homeomorficzne? Wskaż odpowiednie homeomorfizmy.

Zadanie 16. Mając dwa sznurki, możesz jeden zawiązać, a drugi przeciągnąć przez środek pierwszego kilka razy i zawiązać. Liczbę „przeciągnięć” nazwiemy *współczynnikiem zaczepienia* tych pętli. Niech:

- $\gamma_1(x) = \{4(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) + \cos(2\pi x)\cdot(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) + (0, 0, \sin(2\pi x))\}$,
- $\gamma_2(x) = \{4(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) - \cos(2\pi x)\cdot(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) - (0, 0, \sin(2\pi x))\}$,
- $\gamma_3(x) = \{4(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) + \frac{1}{2}\cos(-3\pi x)\cdot(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, \sin(-3\pi x))\}$,
- $\gamma_4(x) = \{4(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) + \frac{3}{2}\cos(-3\pi x)\cdot(\cos\pi x, \sin\pi x, 0) + \frac{3}{2}(0, 0, \sin(-3\pi x))\}$.

Jaki jest współczynnik zaczepienia pętli:

- γ_1, γ_2,
- γ_1, γ_3,
- γ_1, γ_4?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie* 17. Dany jest układ równań liniowych:

$$\begin{aligned}
0 &= 2x + z \\
0 &= 2x + y + 2z + w \\
0 &= 2y + 2z + 2w \\
0 &= 2x - y - w.
\end{aligned}$$

Ilu parametrów potrzebujesz do opisu przestrzeni rozwiązań tego równania?

Dalej, dane jest przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x, y, z)) = (x - z, x + y, -2x + 2z, x - y - 2z)$. Ilu parametrów potrzebujesz do opisu obrazu tego przekształcenia?

Odpowiedzi uzasadnij.